RED BUILDING TEAM

# الدارات الكهربائية ١

## المحاضرة السادس عشر

7 صفحات

الدكتور: معاذ عبد المجيد

التاريخ: 5/11/2014

**مثال:** انشر التابع $f = e^{\frac{1}{z}}$ في الحلقة $0 \leq \|z\| \leq \infty$

$$e^{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{n}}{n!} \Rightarrow e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\, z^{n}} : z \in ¢^{*} \Rightarrow 0 < \|z\| < \infty$$

$$= 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\, z^{2}} + \frac{1}{3!\, z^{3}} \dots \dots \dots \dots$$

$$\Rightarrow A_{-1} = 1$$

## تصنيف النقاط الشاذة (حسب نشر لورنت):

إذا كان الجزء الرئيسي من نشر لورنت للتابع $f$ عند النقطة $Z=a$ مؤلف من عدد محدد من الحدود $N$ (أعلى درجة ل $Z-a$ في المقام ) عندئذ تكون $a$ قطب من المرتبة $N$.

أما إذا كان عدد الجداء غير منته فالنقطة الشاذة أساسية أو جوهرية .

### ملاحظة:

إذا كان الجزء الرئيسي مطابقاً للصفر فإن $a$ إما نقطة عادية أو شاذة قابلة للإزالة.

### أمثلة:

**عين وصنف النقاط الشاذة للتوابع التالية:**

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^{2}}$$

**الحل:**

$Z=0$ شاذة

سننشر وفق قوى $Z$ أي تعبير عن التابع ب $Z$ وقواها الموجبة والسالبة

$$f = \frac{1}{z^{2}}(1 - \cos z) = \frac{1}{z^{2}}[1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{z^{2n}}{(2n)!} ]$$

$$= \frac{1}{z^{2}}\left[1 - 1 + \frac{z^{2}}{2!} - \frac{z^{4}}{4!} \dots \dots \dots \dots .\right]$$

$$= \left[\frac{1}{2} - \frac{z^2}{4!} \dots\dots\dots\right]$$

وهذا النشر صحيح في ¢

*Z=0* قابلة للإزالة.

(النقطة قابلة للإزالة أي لا يوجد راسب).

**مثال ٢:**

$$f = \frac{1 - e^z}{z^2}$$

**الحل:**

التابع تحليلي في $¢^*$ ، *Z=0* نقطة شاذة

$$f = \frac{1}{z^2}(1 - e^z) = \frac{1}{z^2}\left[1 - \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} \dots\dots\dots\right)\right]$$

$$= \left[-\frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{z}{3!} - \frac{z^2}{4!} \dots\dots\dots\right]$$

*Z=0* قطب بسيط ، $A_1 = -1$

**مثال ٣ :**

$$f = e^{2iz}\frac{1}{(z-1)(z^2+4)}$$

**الحل:**

النقاط الشاذة $\{\pm 2i , 1\}$

**ملاحظة للحل:** ((بما أن $e^{-2iz}$ تحليلي بجوار النقاط الشاذة $f$ ولا ينعدم عندها فإنه لا يلعب أي دور في تحديد نوع النقاط الشاذة لـ $f$)).

**الكسر الجبري العادي نقاطه الشاذة غير قابلة للإزالة هي أقطاب مرتبتها نفس مرتبة الجذر في المقام**

النقاط الشاذة $\pm 2i$ , $1$ أقطاب بسيطة

**مثال ٤:**

$$f=\frac{1}{sinz}$$

**الحل :**

$$sinz=0\Longrightarrow z=\pi k\ ,k\in\mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{sinz}=\frac{1}{(-1)^k(z-\pi k)-(-1)^k\frac{(z-\pi k)^3}{2!}+.\frac{(-1)^k(z-\pi k)^5}{5!}\ldots\ldots\ldots}$$

$$=\frac{1}{(-1)^k(z-\pi k)}\left[\frac{1}{1-\frac{(z-\pi k)^2}{3!}+\frac{(z-\pi k)^4}{5!}+\cdots.}.\right]$$

$$=\frac{(-1)^k}{(z-\pi k)}\left[1+\left[\frac{(z-\pi k)^2}{3!}-\frac{(z-\pi k)^4}{5!}+\cdots\right]+[\ ]^2+[\ ]^3\ldots\ldots\ldots\right]$$

$$=\frac{(-1)^k}{z-\pi k}+(-1)^k\frac{(z-\pi k)}{3!}+\frac{7(-1)^k}{k}(z-\pi k)^3+\cdots$$

↪ الجزء الرئيسي ↪ تحليلي ↪ حدود من الدرجة ٥ فأكثر

$$A_{-1}=(-1)^k$$

$z=\pi k$ أقطاب بسيطة

**قاعدة:** إذا كانت $z_0$ قطب من المرتبة $N$ للتابع $f_1$ و $z_0$ نفسها قطب من المرتبة $m$ للتابع $f_2$ فهي قطب من المرتبة $(n+m)$ للتابع $f=f_1\,.f_2$

**مثال٥ :**

$$f=\frac{1}{\sin^3 z}$$

**الحل:**

$$f=\frac{1}{\sin z}\,\frac{1}{\sin z}\,\frac{1}{\sin z}$$

النقاط الشاذة $z = \pi k$ وهي أقطاب من المرتبة الثالثة

## مثال٦ :

$$f = \frac{1 - e^z}{z^2 sinz}$$

**الحل:**

التابع هو ضرب التابعين: $f_2 = \frac{1-e^z}{z^2}$ $f_1 = \frac{1}{sinz}$

$: k \in z$ $z = \pi k$ أقطاب بسيطة لـ $f_1$

$z = 0$ قطب بسيط لـ $f_2$

Z=0 قطب بسيط للتابعين $\Leftarrow$ $z = 0$ قطب من المرتبة الثانية لـ $f$

$: k \in z^*$ $z = \pi k$ اقطاب بسيطة لـ $f$

## مثال٧ :

**أوجد الجزء الرئيسي من نشر لورانت للتابع** $f = \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\right) e^{-z}$ في نقطة مركزها النقطة الشاذة مبيناً نوعها.

**الحل:**

*Z=0* شاذة لـ *f* وهي قطب من المرتبة الثانية

النشر في : $0 < \|z\| < \infty$

$$f = \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\right)\left(1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} \dots\dots\dots.\right)$$

$$= \left(\frac{1}{z} - 1 + \frac{z}{2!} - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} \dots\dots\right) + \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2} - \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} \dots\dots..\right)$$

$$= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}z - \frac{1}{8}z^2 \dots\dots\dots\dots$$

*Z=0* قطب من المرتبة الثانية

الجزء الرئيسي : $\frac{1}{z^2} + 0\frac{1}{z}$

$res(f,0)=0$

**ملاحظة :** $res$ اختصار كلمة $residuum$ وهي تعني راسب

**مثال :** أوجد الجزء الرئيسي من نشر لورنت للتابع $f=\frac{z}{ze^z-sinz}$ في حلقة مركزها النقطة الشاذة مبيناً نوعها.

**الحل :**

النقاط الشاذة هي حل المعادلة $ze^z-sinz=0$

$z=0$ هو الحل الوحيد

إذاً النشر في $0\le \|z\|\le\infty$

$$f=z\frac{1}{z\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\ldots\right)-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}\ldots\ldots\right)}$$

$$=\frac{z}{z^2+\frac{2}{3}z^3+\frac{z^4}{6}+\cdots\ldots}$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{3}z+\frac{z^2}{6}+\cdots..}$$

باعتبار أن $\left(\frac{2}{3}z+\frac{z^2}{6}+\cdots\right)$ هي $-u\Leftarrow\frac{1}{1-u}$ مجموع متتالية هندسية حيث u هو أساسها

$$f=\frac{1}{z}\left[1+\left(-\frac{2}{3}z.-\frac{z^2}{6}+\cdots\right)+\left(-\frac{2}{3}z-\frac{3}{6}z^2\right)^2+\cdots\right]$$

$$f=\frac{1}{z}-\frac{2}{3}-\frac{5}{18}z^2\ldots.$$

تحليلي في $\mathbb{C}^*$

$z=0$ قطب من المرتبة المرتبة الاولى (قطب بسط )

$$res(f,0)=1$$

**مثال:** $f = e^{\frac{1}{z-1}} \cos\frac{1}{z}$

**الحل:**

$z = 0 , z = 1$ هي نقاط شاذة

$f_1 = \frac{1}{e^{z-1}} \Longrightarrow$ $z = 1$ شاذة أساسية لـ $f_1$

$$f_2 = 1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2 2!} + \cdots$$

رئيسي عدد أجزاءه لا نهائية ↪ تحليلي ↪

$z = 0$ أساسية لـ $f_2 = \cos\frac{1}{z}$

$$f_2 = 1 - \frac{1}{2!\, z^2} + \frac{1}{4!\, z^4} \cdots \cdots \cdots$$

رئيسي عدد أجزاءه لا نهائية ↪ تحليلي ↪

$f_1$ تحليلي ولا ينعدم عند الصفر أي أن $z = 0$ اساسية لـ $f$

$f_2$تحليلي و لا ينعدم عند الواحد أي أن $z = 1$ اساسية لـ $f$

## طرق تعيين الراسب :

١) طريقه النشر حسب ما سبق

٢) طريقة النهايات في حساب الراسب : تستخدم عندما تكون النقطة الشاذة قطب عُلمت مرتبته ،عندئذ :

أ- اذا كان $z = a$ قطب بسيط لـ $f$

$$res(f,a) = \lim_{z\to a}[(z-a)f(z)] \Longleftarrow$$

ب- $z = a$ قطب من المرتبة $N$ لـ $f \Longrightarrow res(f,a) = \frac{1}{(N-1)!}.\lim_{z=a}\frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}}[(z-a)^N f(z)]$

ت- $z = a$ أساسية $\Longleftarrow$ لا تستخدم النهايات بال النشر

**مثال :** اوجد رواسب التابع $f = \frac{1}{z^3(z^2+1)}$

$z = 0$ قطب من المرتبة ٣ (لأنه جذر من المرتبة الثالثة للمقام )

$z = \mp i$ أقطاب بسيطة ل $f$

$$res(f,i) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{z^3(z-i)(z+i)} = \frac{1}{-i(2i)} = \frac{1}{2}$$

$$res(f,-i) = \lim_{z\to i}(z+i)\frac{1}{z^3(z-i)(z+i)} = \frac{1}{i(-2i)} = \frac{1}{2}$$

$$res(f,0) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left[z^3\frac{1}{z^3(z^2+1)}\right]'' = -\frac{2}{2} = -1$$

**مثال:** أوجد رواسب التابع $f = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$

$z = \mp i$ أقطاب بسيطة ل $f$

$$res(f,i) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{iz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{-i}{2e}$$

$$res(f,-i) = \lim_{z\to -i}(z+i)\frac{e^{iz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e}{-2i} = \frac{ie}{2}$$

لا أعتقد أن هناك أي شعور يخالج قلب الإنسان يمكن أن يماثل شعور المخترع،

بعد أن تتحول أفكاره بنجاح إلى واقع

هذه المشاعر تنسيه الطعام والنوم والأصدقاء والحب وكل شيء.

نيكولا تسلا